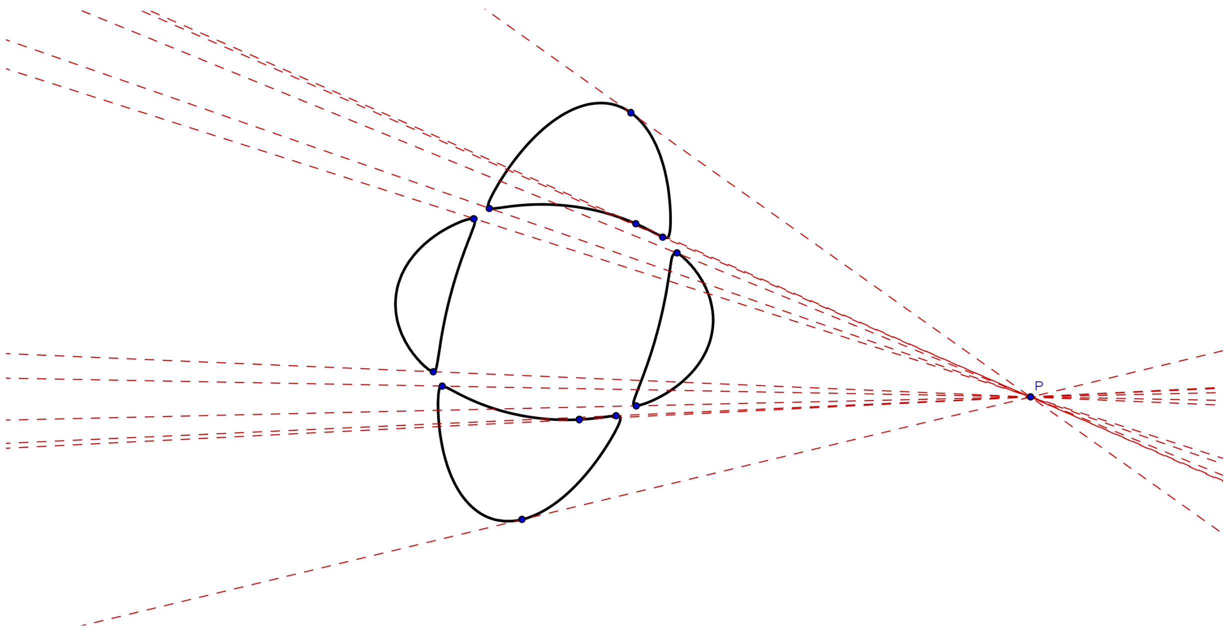
Ebene algebraische Kurven, Vorlesung Nr. 16 vom Freitag, den 3. Juni 2016

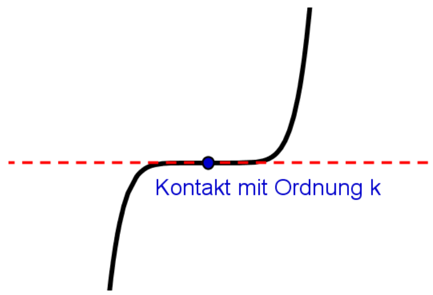
Wir erinnern uns daran, dass für eine projektive Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad d und einen Punkt $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ die Polare gegeben ist durch

$$\nabla_P \mathcal{C} = \mathcal{V}(a\partial_x F + b\partial_y F + c\partial_z F).$$

Sie ist vom Grad $d-1$ und hat die folgende Eigenschaft: Ist $Q \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$, wobei Σ die Menge der singulären Punkte bezeichnet, so gilt $Q \in \nabla_P \mathcal{C}$ genau dann, wenn $P \in T_Q \mathcal{C}$. Es gibt $d(d-1)$ solcher Punkte Q, die das erfüllen, weshalb man nach dem Satz von Bézout erwartet, dass es $d(d-1)$ Tangenten (mit Vielfachheit) an $\mathcal{C}$ durch P gibt.
Für Kurven vom Grad 4, muss es demnach zwölf Tangenten geben. Betrachtet man dazu zwei Ellipsen, die man etwas stört, kann man bei geeigneter Wahl von P und geeigneter Störung, erreichen, dass alle zwölf Tangenten Vielfachheit 1 haben und somit alle sichtbar sind. Dies illustriert die folgende Skizze.



Im Folgenden sei $\mathcal{C}$ eine Kurve, die kein Stern ist, und wir betrachten eine Tangente, die $\mathcal{C}$ im Punkt $Q \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$ mit Vielfachheit $k \geq 2$ schneidet, d.h. $I(\mathcal{C}, T_Q\mathcal{C}; Q) = k$. Mittels Koordinatentransformation können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $Q = (0,0)$ und die Tangente die x-Achse ist.



Um $(0,0)$ kann man die zugehörige affine Kurve $C = V(f)$, wobei $f = F^D$, wie folgt lokal parametrisieren:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^k + \dots \end{cases}$$

Andererseits ist $f(x,0) = x^k g(x)$ für ein $g \in \mathbb{C}[X]$ mit $g(0) \neq 0$. Setzen wir $\varphi(x,y) := f(x,y) - x^k g(x)$, so ist $\varphi(x,0) \equiv 0$, weshalb es nach dem Lemma von Study ein $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ gibt, so dass $\varphi(x,y) = yh(x,y)$. Folglich können wir f schreiben als

$$f(x,y) = x^k g(x) + yh(x,y), \qquad g(0) \neq 0, \qquad h(0,0) \neq 0.$$

Dabei gilt $h(0,0) \neq 0$ aufgrund $k \geq 2$. f besitzt also genau dann diese Darstellung, wenn sich C wie oben angegeben parametrisieren lässt.
Für die Polare $\nabla_P \mathcal{C}$ bezüglich $P = (1:0:0)$ gilt

$$I(\mathcal{C}, \nabla_P \mathcal{C}; Q) = Ord_t(\partial_x f(x(t), y(t))).$$

Mit der soeben gewonnenen Darstellung von f berechnen wir

$$\partial_x f(x,y) = kx^{k-1}g(x) + x^k g'(x) + y\partial_x h(x,y),$$

also

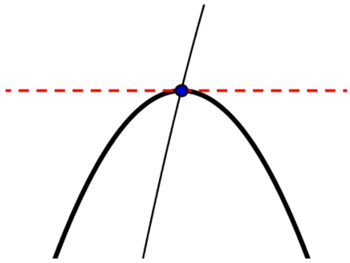
$$\partial_x f(x(t), y(t)) = kt^{k-1}g(t) + t^k g'(t) + t^k \partial_x h(x(t), y(t)) + \dots,$$

weshalb wegen $g(0,0) \neq 0$ folglich $Ord_t(\partial_x f(x(t), y(t))) = k - 1$ gilt.

Fazit: Ist $\mathcal{C}$ kein Stern und $Q \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$, dann gilt

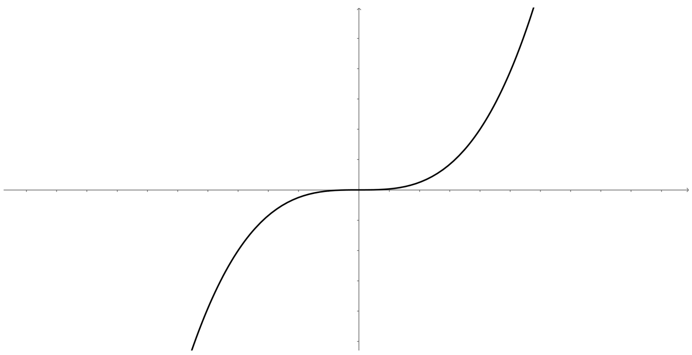
$$I(\mathcal{C}, \nabla_P \mathcal{C}; Q) = I(\mathcal{C}, T_Q \mathcal{C}; Q) - 1.$$

Im Fall einer einfachen Tangente, d.h. $I(\mathcal{C}, T_Q \mathcal{C}; Q) = 2$, ist damit $I(\mathcal{C}, \nabla_P \mathcal{C}; Q) = 1$. Die Polare schneidet die Kurve also mit Vielfachheit 1, was das folgende Bild visualisiert.



Insbesondere ist $\nabla_Q \mathcal{C}$ glatt in Q, d.h. Q ist kein singulärer Punkt.

4.8 Wendepunkte und Hesse'sche Kovariante



Betrachten wir eine „Schulkurve“ wie in der Skizze, d.h. $y = \varphi(x)$ mit $\varphi(0) = 0$, so liegt bei $x = 0$ bekanntlich ein Wendepunkt vor, falls $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Ist $\varphi'''(0) \neq 0$, so spricht man von einem einfachen Wendepunkt. Wir möchten den Zusammenhang zwischen Wendepunkten und der zweiten Ableitung nun allgemein analysieren.

Definition. Zu $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]_d$ sei

$$H_F := \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}[X,Y,Z]_{3(d-2)},$$

die Determinante der Hesse'schen Matrix, wobei $F_{xx} = \partial_x \partial_x F$, etc.

Beachte:

- Es kann $H_F \equiv 0$ sein. Dies kann beispielsweise auftreten, wenn F von Grad 1 ist oder wenn eine Variable nicht vorkommt, z.B. $F = F(x,y)$, d.h. F ist ein Stern.
- H_F kann konstant sein, etwa wenn F von Grad 2 ist. Für $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ist
$$H_F = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 8$$
und damit konstant.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, wann H_F verschwindet, da dies auf entartete kritische Punkte führt.
Ist $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$ und Grad $H_F \geq 1$, so setzen wir $\mathcal{H}_\mathcal{C} := \mathcal{V}(H_F)$ und bezeichnen dies als Hesse-Kurve von $\mathcal{C}$. Das Ziel ist es, zu zeigen, dass $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ die Kurve $\mathcal{C}$ genau in ihren Wendepunkten schneidet.

Zunächst untersuchen wir die Wirkung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ auf H_F. A stellt eine Koordinatentransformation dar. Dazu setzen wir $x_1 := x$, $x_2 := y$ und $x_3 := z$ und für $i \in \{1,2,3\}$ sei
$$x_i' := \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j.$$
Mit $\underline{x} := (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\underline{x'} := (x_1', x_2', x_3')^T$ ist dann $\underline{x'} = A\underline{x}$ und wir setzen
$$F^*(\underline{x}) := F(A\underline{x}).$$
Dann gilt unter Verwendung der Kettenregel
$$\frac{\partial}{\partial x_i} F^*(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(A\underline{x}) = \sum_{j=1}^{3} A_{ki} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F \right)(A\underline{x}), \qquad i \in \{1,2,3\},$$
also
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} F^*(\underline{x}) = \sum_{k,l=1}^{3} A_{lj} A_{ki} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} F \right)(A\underline{x}), \qquad i,j \in \{1,2,3\}.$$
Folglich ist $H_{F^*} = \det(A)^2 (H_F)^*$, d.h. insbesondere ist die Hesse-Kurve der transformierten Kurve $\mathcal{V}(H_{F^*})$ gleich der Transformierten der Hesse-Kurve $\mathcal{V}((H_F)^*)$. Daher ist die Hesse-Kurve Kovariante der ursprünglichen Kurve.

Proposition. Sei $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]_d$ sowie $f = F^D$ die Dehomogenisierung von F, d.h. $f(x,y) = F(x,y,1)$. Dann gilt
$$(H_F)^D = (d-1)^2 \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & \frac{d}{d-1} f \end{pmatrix},$$
wobei $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f$, etc.

Erinnerung: Es gilt
$$\begin{aligned} (\partial_x F)^D(x,y) &= \partial_x f(x,y) \\ (\partial_y F)^D(x,y) &= \partial_y f(x,y) \\ (\partial_z F)^D(x,y) &= f(x,y) - x\partial_x f(x,y) - y\partial_y f(x,y). \end{aligned}$$

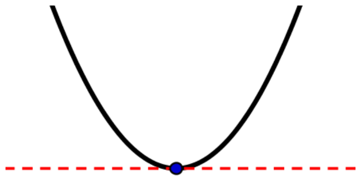
Beweis. Die Euler-Relation, angewandt auf F_x, liefert die Identität
$$xF_{xy} + yF_{yx} + zF_{zx} = (d-1)F_x.$$

Man erhält damit und mit Zeilen- und Spaltenoperationen nun

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} &= \frac{1}{z}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ zF_{zx} & zF_{zy} & zF_{zz} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ (d-1)F_{x} & (d-1)F_{y} & (d-1)F_{z} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d-1}{z}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{x} & F_{y} & F_{z} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d-1}{z^2}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & zF_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & zF_{yz} \\ F_{x} & F_{y} & zF_{z} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d-1}{z^2}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & (d-1)F_{x} \\ F_{yx} & F_{yy} & (d-1)F_{y} \\ F_{x} & F_{y} & dF \end{pmatrix} \\
&= \frac{(d-1)^2}{z^2}\det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{x} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{y} \\ F_{x} & F_{y} & \frac{d}{d-1}F \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dehomogenisieren, d.h. man setzt $z = 1$, liefert die Behauptung. $\square$

Wenn $p \in \mathcal{C}$ singulär ist, also $p \in \Sigma$, dann ist $H_F(p) = 0$. Ab jetzt nehmen wir daher an, dass $p \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$. Wann geht die Hesse-Kurve durch diesen Punkt?
Wir schränken uns wieder auf den Ursprung an und gehen davon aus, dass die Tangente die x-Achse ist, also $y = 0$.



Weiter können wir f schreiben als

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots + yh(x, y).$$

mit $h(x, y) = a + bx + cy + \ldots$. Ist $\alpha \neq 0$, liegt eine einfache Tangente vor. Ist $\alpha = 0$, handelt es sich um einen Wendepunkt.
Wir berechnen nun die Ableitungen von f.

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 2\alpha x + 3\beta x^2 + \ldots + y(b + \ldots), \\
f_{xx}(x, y) &= 2\alpha + 6\beta x + \ldots + yh_{xx}(x, y), \\
f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = b + \ldots, \\
f_y(x, y) &= a + bx + 2cy + \ldots, \\
f_{yy}(x, y) &= 2c + \ldots.
\end{aligned}$$

Dann ist $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = 2\alpha$, $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = b$, $f_y(0, 0) = a$ und $f_{yy}(0, 0) = 2c$ und es folgt

$$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{x} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{y} \\ f_{x} & f_{y} & \frac{d}{d-1}f \end{pmatrix}(0, 0) = \det\begin{pmatrix} 2\alpha & b & 0 \\ b & 2c & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = -2\alpha a^2.$$

Mit der zuvor bewiesenen Proposition erhält man nun $(H_F)^D(0, 0) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$, d.h. falls $(0, 0)$ ein Wendepunkt ist.

Satz. Ist $\mathcal{C}$ eine Kurve ohne Geraden als Komponenten, so haben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ keine gemeinsamen Komponenten, und es gilt:

- $\Sigma \subset \mathcal{H}_\mathcal{C}$.
- Ist $P \in \mathcal{C} \setminus \Sigma$, dann ist $p \in \mathcal{H}_\mathcal{C}$ genau dann, wenn P ein Wendepunkt ist, d.h. $I(\mathcal{C}, T_P\mathcal{C}, P) \geq 3$.